Mathématiques

Rentrée 2024

Lycée Le Corbusier Poissy

PRÉPARER ET RÉUSSIR SON ENTRÉE EN PREMIÈRE GÉNÉRALE

La clef de la réussite, c'est bien sûr un travail régulier et approfondi tout au long de l'année … mais on ne peut construire que sur des bases solides.

Pour vous aider à bien démarrer votre année, voici un recueil d'exercices mêlant reprenant les points qu'il faut maîtriser avant d'entrer en Première.

Profitez de la dernière semaine d'août pour revoir les notions essentielles et être sur un bon rythme dès la reprise ! Voici un planning possible :

Lundi 26/08 :	*Exercices 1 & 3 (évolutions et calcul algébrique)*
Mardi 27/08 :	*Exercice 5 & 7 (lectures graphique et équations)*
Mercredi 28/08 :	*Exercice 9 (tableau de signes)*
Jeudi 29/08 :	*Exercice 2 & 4 (évolutions et calcul algébrique)*
Vendredi 30/09 :	*Exercice 6 & 8 (équation réduite et équations)*
Samedi 31/09 :	*Exercice 10 et 11 (inéquations et position relative)*
Lundi 02/09 :	*Exercices bilans*

Les corrections sont disponibles en envoyant un mail à l'adresse coincorbusier@gmail.com
Nous vous conseillons de vérifier chaque jour vos réponses.

Au plaisir de vous découvrir/revoir à la rentrée, mais avant cela, nous vous souhaitons de passer d'agréables vacances !

1. Évolutions

Avant de commencer souviens-toi il y a quelques mois … :

Augmenter *une quantité* ***de 15%*** *revient à* ***multiplier*** *cette quantité* ***par 1,15*** *.*
Augmenter *une quantité* ***de 4%*** *revient à* ***multiplier*** *cette quantité* ***par 1,04*** *.*
Multiplier *une quantité* ***par 1,3*** *revient à* ***augmenter*** *cette quantité* ***de 30%*** *.*
Multiplier *une quantité* ***par 1,031*** *revient à* ***augmenter*** *cette quantité* ***de 3,1%*** *.*
Multiplier *une quantité* ***par 2*** *revient à* ***augmenter*** *cette quantité* ***de 100%*** *.*

Diminuer *une quantité* ***de 15%*** *revient à* ***multiplier*** *cette quantité* ***par 0,85*** *.*
Diminuer *une quantité* ***de 4%*** *revient à* ***multiplier*** *cette quantité* ***par 0,96*** *.*
Multiplier *une quantité* ***par 0,7*** *revient à* ***diminuer*** *cette quantité* ***de 30%*** *.*
Multiplier *une quantité* ***par 0,969*** *revient à* ***diminuer*** *cette quantité* ***de 3,1%*** *.*
Diviser *une quantité* ***par 2*** *revient à* ***diminuer*** *cette quantité* ***de 50%*** *.*

Augmenter une valeur de p %
revient à la multiplier par $1+\frac{p}{100}$

Diminuer une valeur de p %
revient à la multiplier par $1-\frac{p}{100}$

Exercice 1

On comptait environ 20 000 lions en Afrique en 2015. Une estimation réalisée par des chercheurs indique que cette population baisserait de 3% chaque année.

1. Selon cette estimation, quelle était cette population en 2016 ?

On suppose que cette diminution de 3% se répète chaque année.
On note $L(0)$ la population de lions en Afrique en 2015, $L(1)$ cette population en 2016, et plus généralement, $L(n)$ cette population à l'année $2015+n$.

2. ***a.*** Préciser les valeurs $L(0)$ et $L(1)$.

b. Calculer $L(2)$ puis donner une interprétation du résultat obtenu.

c. Déterminer la valeur $L(5)$ en n'effectuant qu'un seul calcul.

3. Déterminer une expression de la fonction L .

4. Selon ce modèle, déterminer en quelle année la population aura diminué de moitié.
L'espèce est-elle en voie de disparition ?

Exercice 2

Une espèce de tortues invasives a été introduite sur une île d'Océanie. En 2010, on comptait une centaine d'individus. En l'absence de prédateur, et en présence d'espace suffisant, sa population augmente chaque année de 20%.
Pour tout entier naturel n , on note $T(n)$ la population de tortues à l'année $2010+n$.
Ainsi, $T(0)=100$

1. Déterminer une estimation de la population de tortues en 2011.

2. Calculer $T(3)$ puis donner une interprétation du résultat obtenu.

3. Déterminer une expression de la fonction T .

4. Selon ce modèle, déterminer en quelle année l'espèce aura doublée.

2. Calcul algébrique

Nature d'une expression algébrique

$3 \times x$ est un produit

$3 + x$ est une somme

$2 + 3 \times x$ est une somme

$(x+3)(2-x)$ est un produit

$(x+3) - (2-x)$ est une somme

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Pour tous nombres a, b, c et d :

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Développer

Quelques exemples :

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$$

$$(5-3x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$$

$$1 - 9x^2 = 1^2 - (3x)^2 = (1+3x)(1-3x)$$

→ Pour tout réel x différent de -1 :

$$\frac{3+x}{x+1} - 4 = \frac{3+x}{x+1} - \frac{4 \times (x+1)}{x+1} = \frac{3+x-4(x+1)}{x+1} = \frac{3+x-4x-4}{x+1} = \frac{-3x-1}{x+1} = -\frac{3x+1}{x+1}.$$

→ Pour tout réel x différent de 0 :

$$\frac{2x+1}{x} + 5 - x = \frac{2x+1}{x} + \frac{(5-x) \times x}{x} = \frac{2x+1+(5-x) \times x}{x} = \frac{2x+1+5x-x^2}{x} = \frac{-x^2+7x+1}{x}.$$

→ Pour tout réel x différent de -1 et différent de 0 :

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x \times x}{(x+1) \times x} - \frac{2 \times (x+1)}{x \times (x+1)} = \frac{x^2 - 2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x(x+1)}.$$

Exercice 3

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

a. $(1+2x)^2 + (4x-1)^2$ ***b.*** $3(x-1)(5+2x)$ ***c.*** $3 - 4x(5+2x)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

a. $4x^3 + 5x$ ***b.*** $4x^2 - 9$ ***c.*** $(x+2)(1-x) - 3x(x+2)$ ***d.*** $1 - x^2$

3. Réduire au même dénominateur, puis simplifier :

a. $\frac{3}{x+8} + 5$ ***b.*** $5x - 1 + \frac{3x}{2+x}$ ***c.*** $\frac{x}{x+1} - 3$ ***d.*** $\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x}$

Exercice 4

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

a. $5 - (3x-4)^2$ ***b.*** $2x(5+2x)^2$ ***c.*** $x(x-2) + x - 2(5+2x)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

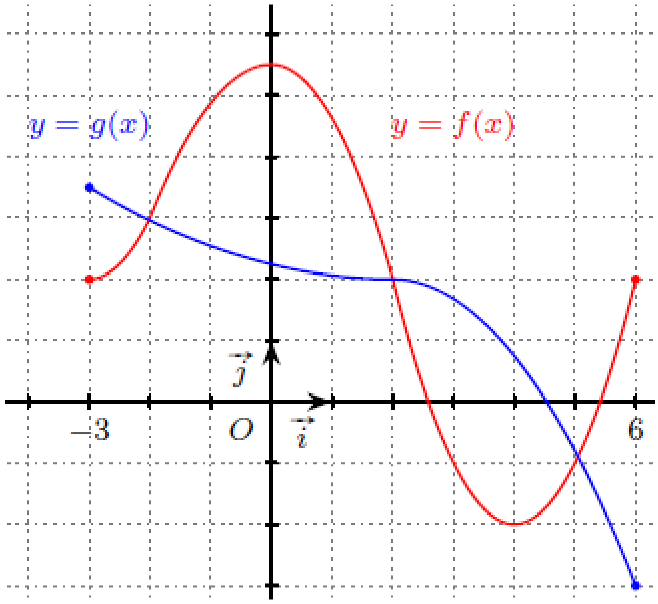
a. $16x^2 - 1$ ***b.*** $2x^2 + 9x$ ***c.*** $(1-x)^2 + 1 - x$

3. Réduire au même dénominateur, puis simplifier :

a. $6 - \dfrac{4x}{3-x}$ **b.** $\dfrac{1}{x-2} + 4x + 1$ **c.** $\dfrac{2x}{1-x} - x$ **d.** $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2x}{x+1}$

3. Lectures graphiques

Exercice 5



1. Construire le tableau de variations et le tableau de signes de chaque fonction.

2. Dans $[-3\ ;\ 6]$, résoudre les (in)équations en donnant l'ensemble solution :

   a. $g(x) = -3$ **b.** $f(x) < -1$ **c.** $f(x) = g(x)$

   d. $f(x) \geq 2$ **e.** $f(x) > g(x)$

3. Donner le plus grand intervalle possible :

   a. f est croissante et négative sur …

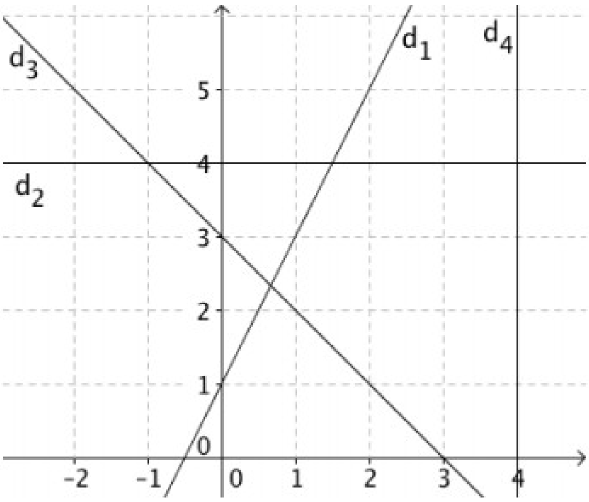
   b. g est décroissante et négative sur …

   c. f est décroissante et positive sur …

   d. f est croissante et positive sur … et sur …

4. Équation réduite d'une droite

Avant de commencer souviens-toi il y a quelques mois … :



Tous les points de la droite d_4 ont pour abscisse 4.
On dit qu'elle a pour équation $x = 4$.

Tous les points de la droite d_2 ont pour ordonnée 4.
On dit qu'elle a pour équation $y = 4$.

d_1 et d_3 ne sont pas parallèles aux axes, donc l'ordonnée d'un point d'une de ces droites dépend de l'abscisse de ce point. Ces droites ont pour ***équation réduite*** :

$$y = m \times x + p$$

m est le coefficient directeur (= « pente ») de cette droite.
↳ *se lit/calcule grâce à la formule ci-contre*

p est l'ordonnée à l'origine de cette droite.
↳ *se lit sur l'axe des ordonnées*

Propriété : Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$, alors la droite a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

d_1 coupe l'axe des ordonnées en 1.
Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 1) et (1 ; 3), donc son coefficient directeur vaut : (3 - 1) / (1 - 0) = 2.
L'équation réduite de d_1 est donc : $y = 2x + 1$.

d_3 coupe l'axe des ordonnées en 3.
Elle passe par les points de coordonnées (-2 ; 5) et (2 ; 1), donc son coefficient directeur vaut : (1 - 5) / (2 + 2) = -1.
L'équation réduite de d_3 est donc : $y = -x + 3$.

Rappels : Toute droite "ascendante" a un coefficient directeur positif.
Toute droite "descendante" a un coefficient directeur négatif.
Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur égale à 0 (c'est le cas de la droite d_2 ici).

Application : Déterminer **l'équation réduite** de la droite d passant par $A(4 ; -1)$ et $B(3 ; 5)$.
Méthode : On calcule le coefficient directeur avec la formule, puis on trouve p à l'aide de l'équation.
On remarque que $x_A \neq x_B$, donc l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$

- On calcule $\boldsymbol{m}$. On applique la formule :

$$\boldsymbol{m} = \frac{5 - (-1)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$$

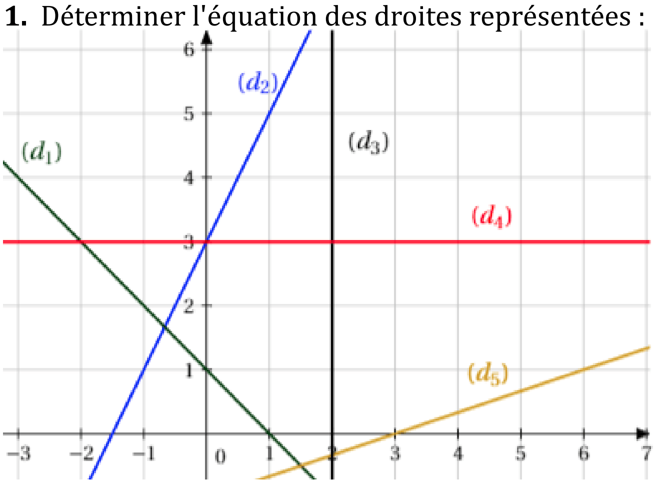
- On calcule $\boldsymbol{p}$. Comme $A(4 ; -1) \in d$, on a :

$-1 = \boldsymbol{m} \times 4 + \boldsymbol{p} \;\Leftrightarrow\; -1 = -6 \times 4 + \boldsymbol{p} \;\Leftrightarrow\; -1 + 24 = \boldsymbol{p} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{p} = 23$

Conclusion : l'équation réduite est $\boldsymbol{y = -6x + 23}$.

Exercice 6 :

1. Déterminer l'équation des droites représentées :



2*a*. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(-90 ; 32) et B(120 ; -38).

***b*.** Tracer la droite (AB) dans le repère ci-contre.

***c*.** Donner l'équation réduite de la parallèle à (AB), et passant par le point de coordonnées (0 ; -5).

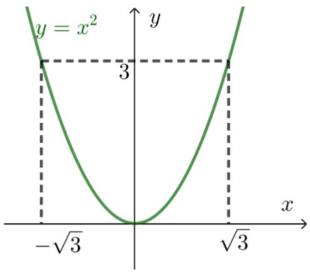
5. Résolution d'équations

Avant de commencer souviens-toi il y a quelques mois … :

1. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $2x^2 - 6 = 0$:

$$2x^2 - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \quad ou \quad x = -\sqrt{3}$$

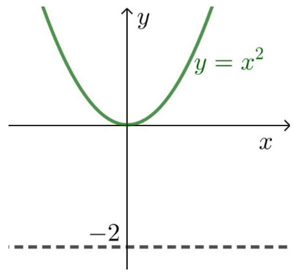
Les solutions sont donc $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.



2. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $-4x^2 = 8$:

$$-4x^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -2$$

Puisqu'un réel au carré ne peut pas être négatif, alors cette équation n'a pas de solutions.



3. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $(2x+1)(3-x) = 0$:

$$(2x+1) \times (3-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \quad ou \quad 3 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = -1 \quad ou \quad -x = -3$$
$$\Leftrightarrow x = -0{,}5 \quad ou \quad x = 3$$

Les solutions sont donc $-0{,}5$ et 3 .

4. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $3x^2 + x = 0$:

$$3x^2 + x = 0$$
On factorise
$$\Leftrightarrow x(3x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad 3x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = -\frac{1}{3}$$

Les solutions sont donc $-\frac{1}{3}$ et 0 .

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 25 - (2x+3)^2$.
Soit également la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -12x$.

1. Déterminer la forme développée de $f(x)$, puis prouver que sa forme factorisée est :
$$f(x) = (2-2x)(2x+8) \quad .$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en choisissant la forme de $f(x)$ la plus adaptée :
a. $f(x) = 0$ ***b.*** $f(x) = 16$ ***c.*** $f(x) = g(x)$ ***d.*** $f(x) = 30$ *(plus difficile)*

Exercice 8 :

Parmi les équations ci-dessous, trouver les équations qu'il faut savoir résoudre en fin d'année de Seconde, puis les résoudre :

1. $x^2 - 5x = 0$ **2.** $6 - x^2 = 0$ **3.** $9x^2 - 5x + 1 = 0$ **4.** $(x+3)(5-2x) = 0$

5. $-3x(2+5x) = 0$ **6.** $2x^2 = 1$ **7.** $9x^2 - 5x + 1 = 1$ **8.** $4x^2 = 3x$

9. $5x^2 + 10 = 0$ **10.** $7 - x^2 = 2$ **11.** $3x^2 - 2x = 7x$ **12.** $x^2 + x + 1 = 2$

6. Tableaux de signes

Avant de commencer souviens-toi il y a quelques mois … :

Rappel n°1 : Construire le tableau de signes de l'expression $(x-3)(4-3x)$.

Étape 1 → on détermine la valeur qui annule chaque terme :

$$x-3=0 \iff x=3$$

$$4-3x=0 \iff -3x=-4 \iff x=\frac{4}{3}$$

Étape 2 → on construit le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		3		$+\infty$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		de la forme $mx + p$, avec m positif ($m = 1$)
$4-3x$		$+$	0	$-$		$-$		de la forme $mx + p$, avec m négatif ($m = -3$)
$(x-3)(4-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		règle des signes

Rappel n°2 : Construire le tableau de signes de l'expression $\dfrac{5-2x}{2x-1}$.

Étape 1 → on détermine la valeur qui annule chaque terme :

$$5-2x=0 \iff -2x=-5 \iff x=\frac{5}{2}$$

$$2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2}$$

/!\ c'est une valeur interdite pour le quotient !

Étape 2 → on construit le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$		de la forme $mx + p$, avec m négatif ($m = -2$)
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		de la forme $mx + p$, avec m positif ($m = 2$)
$\dfrac{5-2x}{2x-1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$		règle des signes

Exercice 9 :

Construire le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ des expressions suivantes :

a. $(4-x)(3x-1)$ ***b.*** $\dfrac{-3+x}{3-4x}$ ***c.*** $x(4-5x)$ ***d.*** $\dfrac{2x}{7x-1}$

7. Résolution d'inéquations et position relative

Méthode :

- Si nécessaire, regrouper les deux membres de l'inéquation dans un seul, de sorte à obtenir 0 dans le second membre.
- Selon l'expression du membre de gauche, faire apparaître une forme factorisée, ou un seul quotient (dans lequel le numérateur et le dénominateur sont sous forme factorisée).
- Construire le tableau de signes de l'expression obtenue.
- Conclure.

Exemple n°1 :
D'après le tableau de signes en page précédente :

→ l'inéquation $(x-3)(4-3x) > 0$ a pour ensemble solution : $]\frac{4}{3}\ ;\ 3[$.

→ l'inéquation $(x-3)(4-3x) \leq 0$ a pour ensemble solution : $]-\infty\ ;\ \frac{4}{3}] \cup [3\ ;\ +\infty[$.

Exemple n°2 :
D'après le tableau de signes en page précédente :

→ l'inéquation $\dfrac{5-2x}{2x-1} \geq 0$ a pour ensemble solution : $]\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}]$.

→ l'inéquation $\dfrac{5-2x}{2x-1} < 0$ a pour ensemble solution : $]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}\ ;\ +\infty[$.

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $(6-x)(2x-1) \leq 0$ ***b.*** $\dfrac{x-16}{4-x} \geq 0$ ***c.*** $x^2 - 49x - 3 < -3$ ***d.*** $\dfrac{3}{x-2} > 1$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 25 - (2x+3)^2$.
Soit également la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -12x$.

a. A l'aide d'une identité remarquable, factoriser l'expression $f(x) - g(x)$.

b. Construire le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de $f(x) - g(x)$.

c. En déduire, suivant les cas, la position de C_f par rapport à celle de C_g .

Exercice bilan 1 :

1. Développer l'expression $3x - 4x(5-2x)^2$.

2. Simplifier le quotient $\dfrac{3h^2 + h}{h}$.

3. Réduire au même dénominateur les expressions suivantes : ***a.*** $\dfrac{3}{x+8} - 5$ ***b.*** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{4-x}$

4. Parmi les équations ci-dessous, indiquer celles qu'il faut savoir résoudre en fin d'année de Seconde, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ seulement celles-ci :

a. $9x^2 - 5x + 1 = 0$ ***b.*** $4x^2 = 3x$ ***c.*** $(4-x)(4+x) = 8$ ***d.*** $x^2 + x = 3$

5. Déterminer la valeur interdite puis résoudre l'équation dans chaque cas :

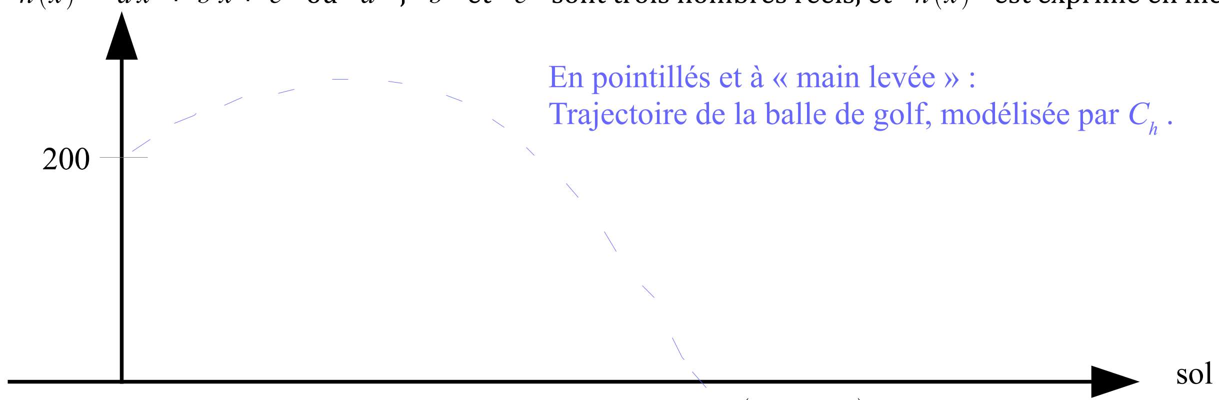
a. $\dfrac{3x}{x+8} = 5$ ***b.*** $\dfrac{x^2+1}{5-x} = 0$

6. En justifiant, construire le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de l'expression $f(x) = \dfrac{3x+1}{(1-2x)^2}$.

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations : ***a.*** $4x^2 - x \leq 0$ ***b.*** $-2x + 1 < 7$.

Exercice bilan 2 :

Un joueur de golf situé sur une colline haute de 200 m tire en direction d'une vallée.
En appelant x la distance horizontale (en mètres) parcourue par cette balle, on peut affirmer que la hauteur de la balle par rapport à la vallée est donnée par une fonction h telle que :
$h(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels, et $h(x)$ est exprimé en mètres.



Lors du lancer, la balle passe par le points de coordonnées $(25 \; ; \; 225)$.

1. Donner les coordonnées d'un deuxième point de C_h , puis justifier que $c = 200$.

2. Justifier que les réels a et b vérifient l'égalité : $25a + b = 1$.

3. On admet également que $250a + 5b = 4$.
En résolvant un système, déterminer alors les valeurs des réels a et b .

4. On admet à présent que $h(x) = -0{,}008x^2 + 1{,}2x + 200$.

a. Prouver que la fonction h peut aussi s'écrire : $h(x) = -0{,}008(x-250)(x+100)$.

b. Résoudre l'équation $h(x) = 0$. À quelle distance de la colline la balle retombe-t-elle ?

5. Sachant que l'arc représentant la trajectoire est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son sommet, déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.